DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 68 del febbraio 1977

Sommario

4 DARIO ANTISERI, Memoria biologica, mondo 3 e stati problematici oggettivi

12 CARLO FELICE MANARA, Gruppi cristallografici piani. 1 - Esperienze e proposte di didattica matematica 3.

21 CESARE CURRADO, Il comportamento degli animali

24 M. DE PAZ - M. PILO, Proposte sperimentali per uno studio dell'ambiente nella media inferiore

28 ITALO ZAINA, Paesaggi italiani a rocce magmatiche

34 Notiziario

39 Recensioni

Fascicolo di 40 pagine più inserti redazionali

Inserti

Nello studio della *Filogenesi vegetale* il mondo delle piante va sempre più differenziandosi. La terza puntata ci presenta ora un nuovo argomento: *Le piante semiterrestri*.
Come in precedenza, all'accuratezza del testo si accompagna un valido e vasto corredo iconografico.
Continua, con un altro gruppo di sei, la pubblicazione delle schede per lo studio dell'ambiente.

In copertina

Acorus calamus (sezione). *(Fotocolor Armati)*

Carlo Felice Manara

GRUPPI CRISTALLOGRAFICI PIANI. 1

Esperienze e proposte di didattica matematica. 3

1 - Il presente articolo è dedicato alla presentazione di quelli che vengono chiamati abitualmente i *gruppi cristallografici piani;* esso ha come scopo quello di avvalersi di alcuni contenuti della geometria elementare tradizionale per illustrare alcuni concetti della teoria dei gruppi.

Come è noto nelle concezioni moderne della didattica della matematica ha molto posto l'insegnamento delle strutture algebriche; è questa una conseguenza della evoluzione moderna della matematica, evoluzione che ha portato in primo piano l'interesse sulle strutture piuttosto che sui contenuti di questa scienza. Tra le strutture algebriche che sono più studiate, anche nelle scuole dell'ordine secondario, vi è quella di gruppo; si potrebbe tuttavia osservare che nella pratica didattica l'insegnamento della teoria dei gruppi presenta a volte qualche difficoltà. Invero si potrebbe dire da una parte che la teoria dei gruppi presenta una relativa semplicità rispetto alle strutture tradizionali dell'algebra, perché un gruppo possiede una sola operazione di composizione interna, quella che tradizionalmente viene chiamata *prodotto;* ma d'altra parte si incontra talvolta una certa difficoltà nella didattica per il fatto che l'operazione di prodotto di un gruppo in generale non è commutativa. In altre parole si potrebbe dire che lo studente è abituato dallo studio della matematica elementare ad operare con strutture commutative, e trova perciò qualche difficoltà a familiarizzarsi con strutture non commutative; e ciò nonostante il fatto che si possano trovare molti esempi di operatori non commutativi, anche in campi diversi da quello della matematica tradizionale. È noto invero che le strutture linguistiche ammettono degli operatori non commutativi, come appare chiaro a chi consideri per esempio che ovviamente « il fratello del padre di Paolo » non è « il padre del fratello di Paolo ».

Eppure non sarebbe difficile trovare, anche nella matematica tradizionalmente intesa, dei contenuti atti a presentare con molta evidenza la opportunità e la utilità della introduzione della struttura di gruppo; in particolare la geometria, anche nella sua concezione classica, può fornire molti contenuti atti ad illustrare la utilità e la fecondità della impostazione che si appoggia sul concetto di gruppo. E d'altra parte le nozioni relative ai gruppi di trasformazioni permettono di dare particolare chiarezza a certi concetti della geometria, anche elementare, come il concetto di classe di equivalenza e di invariante.

2 - Nel seguito supporremo noti i concetti fondamentali della geometria elementare euclidea, e supporremo anche noto il concetto di trasporto rigido di una figura piana; non ci interessa qui dare una assiomatizzazione rigorosa dei fondamenti della geometria eucleida, e ci limitiamo a ricordare che tale assiomatizzazione può essere fatta in molti modi; per esempio si può accettare la nozione di congruenza come primitiva, definendola implicitamente con un opportuno insieme di assiomi, come fa per esempio Hilbert nella sua opera classica *Fondamenti di geometria;* oppure si potrebbe dare come primitiva la idea di figura rigida, ed assiomatizzare le isometrie piane. È chiaro che occorre comunque evitare il circolo vizioso che porta a definire il trasporto rigido mediante l'uguaglianza (definendo trasporto rigido la trasformazione che conserva l'uguaglianza delle figure), e definendo poi l'uguaglianza mediante il trasporto rigido.

Supporremo anche noti gli elementi della teoria dei gruppi di trasformazioni ed il corrispondente vocabolario; indicheremo con il simbolo MR il gruppo delle isometrie del piano.

Sia μ una trasformazione del gruppo MR; considerandola come un operatore, ed indicando con A un punto qualunque del piano, scriveremo

$$A' = A\mu \tag{1}$$

per indicare che A è portato da μ in A' oppure anche che A' è il punto che si ottiene da A con l'operazione simbolizzata da μ. In generale, indicando con $\mathcal{F}$ una figura qualunque del piano, scriveremo anche

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\mu \tag{1 bis}$$

con significato analogo.

Adotteremo quindi la convenzione di scrivere il simbolo dell'operatore *dopo* il simbolo dell'elemento sul quale esso opera; ciò avviene in matematica per esempio con la funzione « fattoriale di n » (dove n è un intero positivo), funzione che viene indicata con il simbolo $n!$.

E del resto nelle lingue si hanno esempi di convenzioni svariate: si pensi per esempio alla operazione logica che consiste nel negare un verbo: l'italiano dice « io *non* so », il francese dice « je *ne* sais *pas* » utilizzando un operatore che viene scritto in parte prima ed in parte dopo il verbo che viene negato; infine il tedesco dice:

« ich weiss *nicht* », scrivendo quindi l'operatore dopo il verbo negato.

Il vantaggio della convenzione che abbiamo adottato consiste tra l'altro nel fatto che l'operazione di composizione di due operazioni viene indicata scrivendo i simboli degli operatori esattamente nell'ordine nel quale le operazioni sono effettuate. Si abbia per esempio accanto alla operazione già considerata, indicata con μ, anche un'altra operazione dello stesso gruppo MR, indicata con ν, tale che si abbia

(2) $$A'' = A'\nu;$$

scriveremo allora

(3) $$A'' = A\mu\nu.$$

Come è noto, la composizione di due operazioni viene anche chiamata « prodotto » di esse; e anche noi utilizzeremo questo modo di esprimerci.

In particolare indicheremo con I l'operazione identica, tale cioè che si abbia, per ogni punto A del piano,

$$A = A\,I$$

ed indicheremo con μ^{-1} l'operazione inversa di una operazione μ qualesivoglia, tale che si abbia dunque:

$$\mu\mu^{-1} = \mu^{-1}\mu = I$$
$$(\mu^{-1})^{-1} = \mu.$$

Come abbiamo già detto, diamo per conosciuti i concetti della geometria euclidea (elementare nel senso classico della parola) ed in particolare quindi anche il concetto di « verso di rotazione » nel piano. Ne consegue l'osservazione che il gruppo MR delle isometrie piane contiene operazioni di due tipi fondamentali; quelle del primo tipo conservano il verso di due angoli corrispondenti o anche conservano i versi di rotazione. Queste operazioni formano ovviamente un sottogruppo delle isometrie piane, che indicheremo col simbolo MRD (movimenti rigidi diretti).

Dall'applicazione dei criteri di uguaglianza dei triangoli si ottiene immediatamente la proposizione seguente:

Prop. 1 - Dati nel piano due punti A ed A' e due semirette a ed a' rispettivamente per A e per A', esistono due isometrie che portano A in A' ed a in a'; di queste isometrie una è diretta e l'altra inversa.

Invero data un'altra semiretta b per A, essa può avere come corrispondente un'altra semiretta che formi con a' lo stesso angolo che b forma con a; di semirette cosiffatte ce ne sono due, ed indicheremo con b' la semiretta che forma con a' un angolo uguale in valore assoluto e verso a quello che b forma con a; l'altra semiretta è indicata con b'' (fig. 1). Ovviamente la scelta di b' come corrispondente di b equivale alla scelta della isometria *diretta* che porta la coppia (A, a) nella coppia (A', a').

Divideremo la trattazione seguente in due parti; nella prima analizzeremo il sottogruppo delle isometrie piane dirette; d'ora innanzi quindi e fino ad esplicito avviso contrario, quando parleremo di « isometrie » oppure di « trasformazioni » o di « corrispondenze » intenderemo parlare di operazioni che appartengono al sottogruppo delle isometrie dirette (sottogruppo che, come abbiamo detto, indicheremo con MRD).

Vedremo presto che il gruppo MRD non è commutativo; tuttavia si vede chiaramente subito che in MRD sono contenuti anche dei sottogruppi commutativi (che diremo anche « abeliani » secondo l'uso). Due gruppi cosiffatti sono quelli delle traslazioni (che indicheremo con T) e quello delle rotazioni che lasciano fermo un punto A del piano; indicheremo con R (A) un gruppo cosiffatto.

È chiaro che una traslazione risulta determinata dalla condizione di portare un punto A in un punto B (fig. 2); indicheremo quindi con

$$\tau\,(B-A)$$

la traslazione che porta A in B oppure anche, indicando con $\mathbf{v}$ il vettore che ha come primo estremo A e come secondo B, cioè ponendo

$$\mathbf{v} = B-A$$

scriveremo

$$\tau\,(\mathbf{v}).$$

Si ha chiaramente, indicando con $\mathbf{u}$ un secondo vettore (fig. 3):

$$\tau(\mathbf{v}) \cdot \tau(\mathbf{u}) = \tau(\mathbf{u})\,\tau(\mathbf{v}) = \tau(\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

e quindi

$$[\tau(\mathbf{v})]^{-1} = \tau(-\mathbf{v})$$
$$\tau(0) = I.$$

Scegliamo ora il verso antiorario come verso positivo delle rotazioni, secondo il solito, e scegliamo un angolo come unità di misura. Per mantenerci sul piano elementare adotteremo la solita unità pratica, secondo la quale l'angolo giro viene misurato da 360°. Nulla vieterebbe tuttavia di snellire le notazioni scegliendo come unità di misura l'angolo giro, la cui misura venga posta uguale ad 1. Indicheremo con il simbolo

$$\rho\,(A,\,\alpha)$$

la isometria diretta data dalla rotazione di un angolo di α gradi che ha come punto fisso (o anche come « centro di rotazione ») il punto A.

Si ha ovviamente

$$\rho(A,\alpha)\,\rho(A,\beta) = \rho(A,\beta)\,\rho(A,\alpha) = \rho(A,\gamma)$$

dove l'angolo γ è dato dalla relazione

(4) $$\gamma \equiv \alpha + \beta \quad (\text{mod. } 360°)$$

Dalla relazione (4) si trae facilmente la esistenza di una trasformazione del gruppo R (A) che è involutoria. Si ha invero

$$[\rho(A, 180°)]^2 = \rho(A, 0) = I.$$

L'analisi delle isometrie dirette del piano si fonda sul classico teorema seguente:

Teor.: Ogni isometria diretta piana è una rotazione oppure una traslazione.

Per la dimostrazione si osserva che la isometria considerata, secondo la *prop. 1*, è univocamente determinata quando si imponga che un segmento AB sia portato dalla isometria nel segmento A' B' tale che sia

$$AB = A'B'.$$

Si congiunga A con A′ e B con B′ (fig. 4); si traccino gli assi dei due segmenti A A′ e B B′; si possono dare due casi: *a)* se in particolare i due assi nominati sono paralleli tra loro, si ha che ogni segmento risulta parallelo al suo corrispondente e la isometria è una traslazione caratterizzata dal vettore A′–A; *b)* i due assi considerati si incontrano in un punto O; in questo caso si ha

$$OA = OA' \quad ; \quad OB = OB'$$

ed il punto O risulta essere ugualmente distante da due punti corrispondenti. Si ha quindi che la isometria è una rotazione dell'intero piano attorno ad O. In particolare si ha che date due rette corrispondenti qualsivogliano a ed a′, il loro angolo è dato da

$$A\hat{O}A' = B\hat{O}B'.$$

Ne consegue che data una retta qualunque r, se la sua corrispondente in una isometria diretta è una retta r′ parallela alla r, la isometria è una traslazione oppure una rotazione di 180°.

3 - Un ulteriore analisi deve essere svolta per determinare il risultato della composizione di due isometrie dirette che non appartengono allo stesso sottogruppo abeliano di MR; questa analisi ci porterà a riconoscere alcuni casi elementari di non commutatività della operazione di prodotto di due isometrie.
Siano dunque anzitutto due rotazioni:

$$\rho(M, 2\alpha) \quad ; \quad \rho(N, 2\beta)$$

e supponiamo che i due centri di rotazione M ed N siano distinti (fig. 5). Supponiamo inoltre che sia

(5) $$2\alpha + 2\beta \neq 0 \quad (\text{mod. } 360^\circ).$$

In forza della ipotesi è possibile costruire un triangolo MNP tale che si abbia:

$$P\hat{M}N = \alpha \quad ; \quad M\hat{N}P = \beta$$

essendo gli angoli misurati anche in segno, tenendo conto del verso di rotazione che abbiamo scelto come positivo. Indichiamo con P′ il simmetrico di P rispetto alla retta congiungente M con N.
Si ha facilmente

$$P' = P\,\rho(M, 2\alpha)$$

ed è anche

$$P = P'\,\rho(N, 2\beta)$$

e pertanto si ha

$$P = P\,\rho(M, 2\alpha)\,\rho(N, 2\beta)$$

Ne consegue che il punto P è unito per la isometria prodotto delle due

$$\rho(M, 2\alpha) \cdot \rho(N, 2\beta),$$

eseguite nell'ordine scritto. In modo analogo si dimostra che il punto P′ è unito per la isometria prodotto delle due rotazioni

$$\rho(N, 2\beta) \cdot \rho(M, 2\alpha)$$

eseguite nell'ordine scritto.

È chiaro che le due isometrie considerate sono rotazioni di un angolo γ che vale

$$\gamma = 2\alpha + 2\beta \quad (\text{mod. } 360^\circ)$$

e l'analisi eseguita or ora dà quindi un esempio di non commutatività del prodotto delle operazioni, perché — ripetiamo — le due isometrie che si ottengono come prodotto delle rotazioni date, pur essendo anch'esse delle rotazioni hanno punti uniti diversi tra loro, la cui posizione dipende (dalle rotazioni date, ovviamente e) dall'ordine in cui il prodotto delle operazioni è stato eseguito.
Si potrebbe quindi scrivere in forma simbolica:

(6) $$\begin{cases} \rho(M, 2\alpha) \cdot \rho(N, 2\beta) = \rho(P, \gamma) \\ \rho(N, 2\beta) \cdot \rho(M, 2\alpha) = \rho(P', \gamma). \end{cases}$$

Supponiamo ora che l'ipotesi (5) non sia verificata e che gli angoli delle due rotazioni possano essere indicati con δ e $-\delta$. Costruiamo il triangolo NMN′ tale che sia (fig. 6)

(7) $$NM = MN' \quad ; \quad N\hat{M}N' = \delta.$$

Si ha allora immediatamente

(8) $$\tau(N'-N) = \rho(N, -\delta)\,\rho(M, \delta).$$

Analogamente costruiamo il triangolo MNM′ tale che sia

$$MN = NM' \quad ; \quad M\hat{N}M' = -\delta;$$

allora si ha

(9) $$\tau(M'-M) = \rho(M, +\delta)\,\rho(N, -\delta).$$

Il confronto tra queste due formule mostra che il prodotto di due rotazioni di angoli opposti non è commutativo, ma dipende dall'ordine in cui le rotazioni sono eseguite, pur producendo in ogni caso una traslazione, come è evidente.
Un caso particolare importante di questo risultato si ha quando si pone

$$\delta = 180^\circ.$$

In tal caso il prodotto delle due rotazioni è una traslazione secondo un vettore che è parallelo alla retta che congiunge i due centri e di modulo uguale al doppio della distanza tra i centri stessi (fig. 7). In particolare si ha

(10) $$\rho(A, 180^\circ)\,\rho(B, 180^\circ) = \tau[2(B-A)].$$

Ovviamente il verso del vettore dipende dall'ordine nel quale vengono eseguite le due rotazioni.
Si trae da quanto abbiamo detto che una traslazione qualesivoglia può sempre essere rappresentata come prodotto di due rotazioni opportune. In particolare essa può sempre essere considerata come prodotto di due rotazioni di 180°, una delle quali ha il suo centro in un punto arbitrariamente scelto.
Dalle (8) e (9) si trae anche facilmente l'analisi del prodotto di una rotazione e di una traslazione.
Infatti dalla (9), operando a destra con $\rho(N, \delta)$ e tenendo conto del fatto che si ha evidentemente

$$\rho(N, -\delta)\,\rho(N, \delta) = I,$$

si ottiene

$$\rho(M, \delta) = \tau(M'-M) \cdot \rho(N, \delta)$$

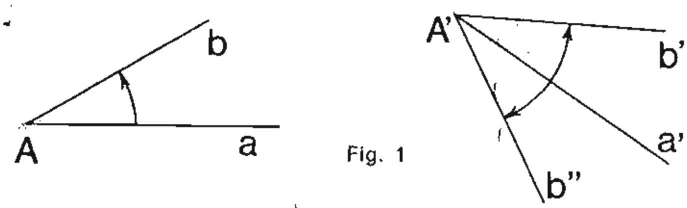


Fig. 1

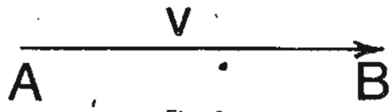


Fig. 2

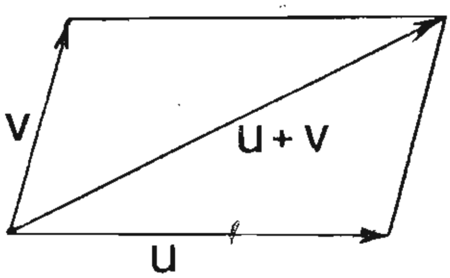


Fig. 3

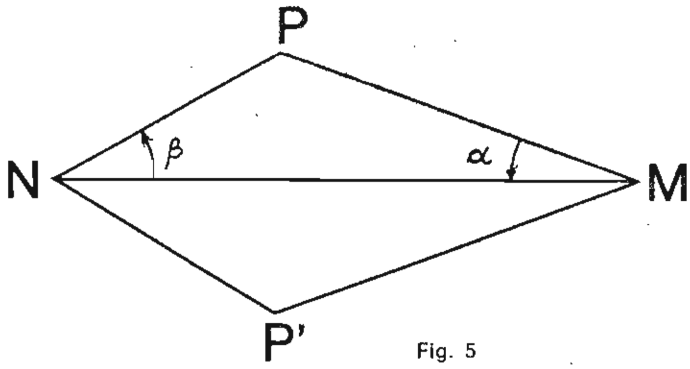


Fig. 5

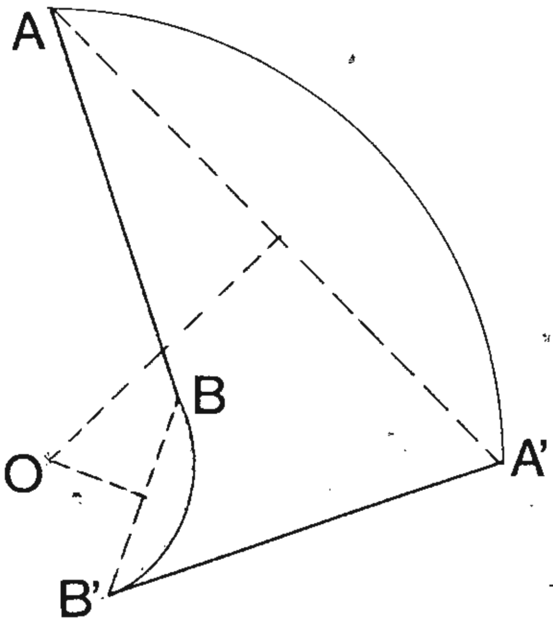


Fig. 4

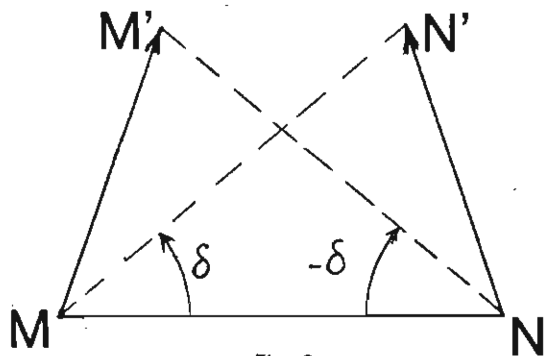


Fig. 6

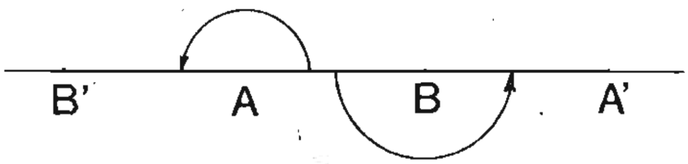
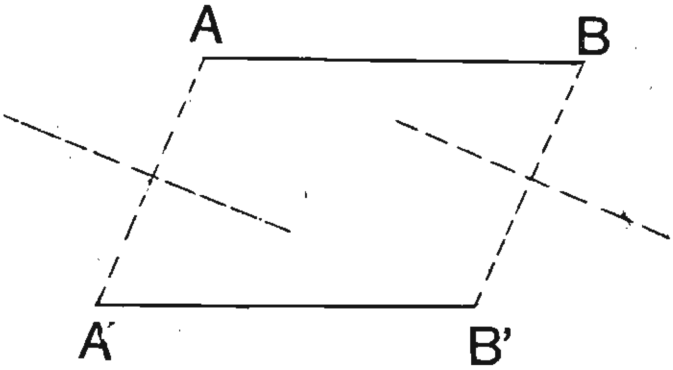


Fig. 7



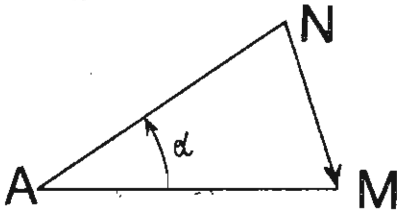


Fig. 8

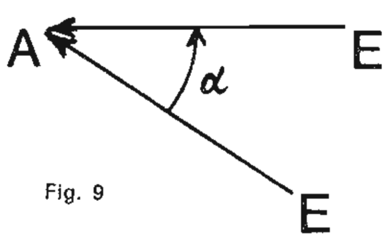


Fig. 9

ed analogamente operando sulla (8) con $\rho(N, \delta)$ a sinistra si ha

$$\rho(M, \delta) = \rho(N, \delta)\ \tau(N'-N).$$

Del resto l'analisi del prodotto di una rotazione e di una traslazione può essere fatta anche in modo meno formale e più diretto, con procedimento analogo a quello che è già stato eseguito negli altri casi.
Sia una rotazione $\rho(A, \alpha)$ di centro A e di angolo α, e sia una traslazione caratterizzata da un vettore $\mathbf{v}$. Si costruisca il triangolo MNA isoscele (fig. 8), soddisfacente alle condizioni

$$AM = AN \quad ; \quad \widehat{MAN} = \alpha \quad ; \quad \mathbf{v} = M-N.$$

Si verifica allora immediatamente che il punto M è unito per la isometria

$$\rho(A, \alpha)\ \tau(M-N)$$

ed analogamente si ha che il punto N è unito per la isometria

$$\tau(M-N)\ \rho(A, \alpha).$$

Pertanto avremo

$$\rho(M, \alpha) = \rho(A, \alpha)\ \tau(M-N)$$
$$\rho(N, \alpha) = \tau(M-N)\ \rho(A, \alpha).$$

4 - Consideriamo ora due elementi μ, ν entrambi appartenenti al gruppo MRD. Come è noto, l'elemento

$$(11) \qquad \mu' = \nu^{-1}\ \mu\ \nu$$

si dice l'elemento *trasformato di* μ *mediante* ν.
È chiaro che la relazione (11) può anche essere scritta nella forma seguente

$$(12) \qquad \nu\ \mu' = \mu\ \nu$$

e di qui si trae che si ha

$$\mu' = \mu$$

allora ed allora soltanto quando i due elementi μ e ν sono permutabili; se ciò non avviene si ha ovviamente

$$\mu' \neq \mu.$$

Pertanto ci interesserà l'analisi dei casi in cui le due operazioni considerate non sono permutabili tra loro. Si hanno i seguenti casi interessanti per il seguito:

I) *Trasformazione di una traslazione con una rotazione.*

Sia $\rho(A, \alpha)$ la rotazione e sia $\tau(A-E)$ la traslazione; si abbia anche (fig. 9)

$$E' = E\ \rho(A, \alpha).$$

Allora si ha facilmente

$$(13) \qquad \tau(A-E') = \rho(A, -\alpha)\ \tau(A-E)\ \rho(A, \alpha).$$

In parole questo risultato si potrebbe enunciare dicendo che la trasformata di una traslazione mediante una rotazione è una traslazione rappresentata da un vettore che si ottiene da quello della traslazione originale, ruotato di un angolo uguale a quello di rotazione.

II) *Trasformazione di una rotazione con una traslazione.*

Indicata con $\rho(A, \alpha)$ la rotazione e considerata la traslazione $\tau(A'-A)$ si ha

$$(14) \qquad \rho(A', \alpha) = \tau(A-A')\ \rho(A, \alpha)\ \tau(A'-A)$$

come si deduce facilmente osservando che l'operazione che sta alla destra ha il punto A' come punto unito.
In parole si potrebbe esprimere questo risultato dicendo che la trasformata di una rotazione mediante una traslazione è una rotazione dello stesso angolo della originaria, avente come centro il trasformato del centro della prima mediante la traslazione.

III) *Trasformazione di una rotazione mediante una rotazione.*

Siano $\rho(A, \alpha)$ e $\rho(B, \beta)$ le due rotazioni, avendosi in generale

$$A \neq B.$$

Considerato il punto

$$B' = B\ \rho(A, \alpha)$$

si ha

$$(15) \qquad \rho(B', \beta) = \rho(A, -\alpha)\ \rho(B, \beta)\ \rho(A, \alpha).$$

Anche alla dimostrazione di questa formula si giunge facilmente osservando che l'operazione che figura alla destra ammette B' come punto unito, come si vede subito su una facile figura che lasciamo tracciare al lettore, al quale lasciamo anche la facile enunciazione con parole del contenuto della formula, enunciazione che è del resto analoga a quella dei due casi precedentemente considerati.

5 - Applicheremo ciò che abbiamo esposto finora in forma discorsiva all'analisi dei gruppi discreti di isometrie dirette. Ricordiamo che si dice che un gruppo G di isometrie piane è *discreto* se esso possiede la seguente proprietà: considerato un punto qualunque P del piano che non sia unito per alcuna operazione del gruppo, esiste un numero positivo r tale che nel cerchio avente centro in P e raggio r non esiste alcun punto corrispondente di P per una operazione del gruppo G.
Si può dimostrare che, dato un gruppo discreto G, esiste almeno un dominio D che ha le seguenti proprietà:

I) dato un punto P di D, nessun corrispondente di P per una operazione del gruppo appartiene a D;

II) ogni punto del piano ha un suo corrispondente (ed uno solo, per quanto precede) nel dominio D per una trasformazione del gruppo.

Un dominio D che abbia le proprietà enunciate or ora viene chiamato *dominio fondamentale* per il gruppo G; è chiaro che quando il gruppo discreto è assegnato, il piano viene — per così dire — tappezzato (o ricoperto) mediante domini fondamentali. Il che giustifica anche il nome di *gruppi degli ornamenti* o altri nomi (come quello di *gruppi cristallografici*) che vengono dati a questi gruppi, con riferimento agli effetti estetici che si possono trarre sfruttando le proprietà dei gruppi stessi, come vedremo.

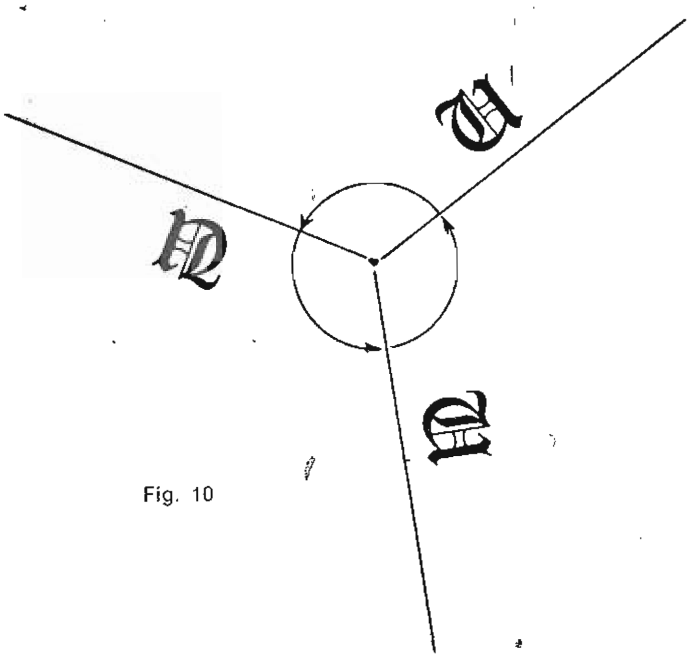


Fig. 10

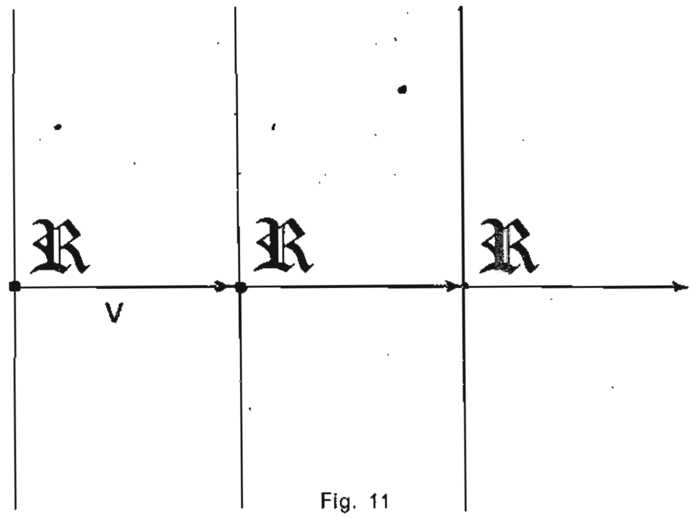


Fig. 11

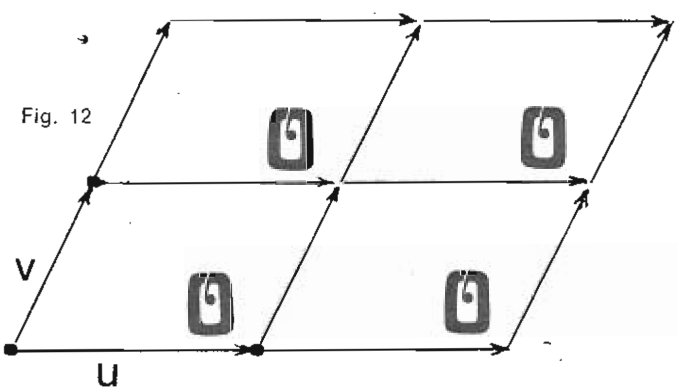


Fig. 12

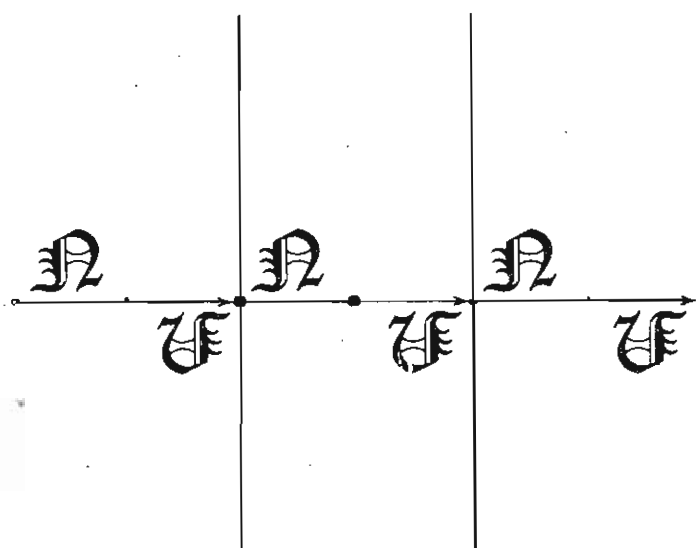


Fig. 13

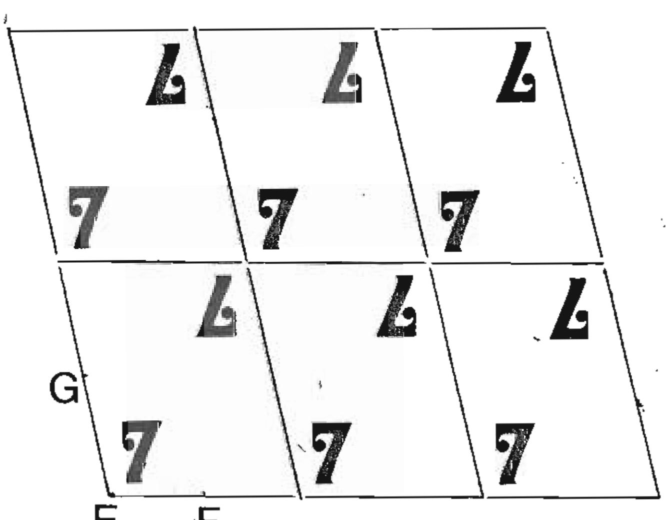


Fig. 14

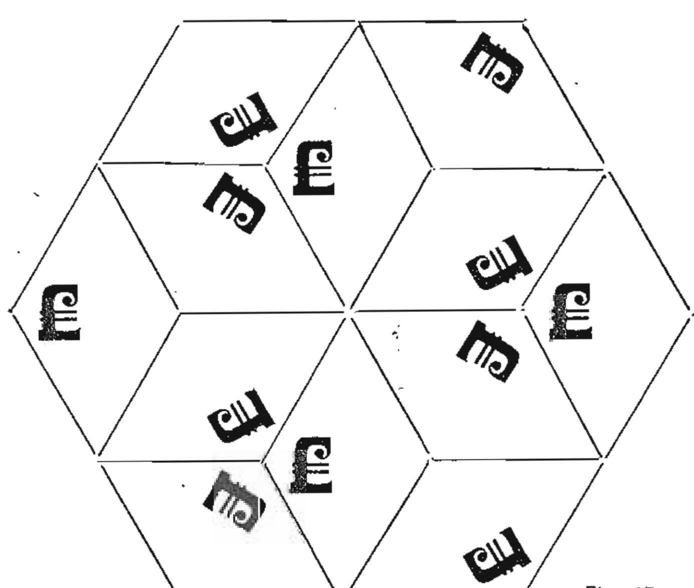


Fig. 15

Nel seguito di questa prima parte classificheremo i domini fondamentali dei gruppi discreti di MRD, partendo dalle operazioni generatrici di un gruppo, cioè da quelle operazioni mediante le quali, per composizione, si ottengono tutte le operazioni del gruppo.

Inizieremo con i gruppi abeliani, di cui abbiamo parlato nel paragrafo 2, per proseguire poi con altri gruppi che non sono commutativi.

1 - Gruppi discreti abeliani di rotazioni.

Un gruppo G cosiffatto è generato da una rotazione di un angolo α attorno ad un punto fisso. Come dominio fondamentale D può essere assunta una regione angolare avente il suo vertice nel punto fisso e limitata da due semirette formanti un angolo α (in figura 10 si ha $\alpha = 120°$). Si ha immediatamente la proposizione seguente: *Prop. 2* - Condizione necessaria e sufficiente perché il gruppo di rotazione attorno ad un punto fisso generato da una rotazione di un angolo α sia discreto è che il rapporto di α all'angolo giro sia dato da un numero razionale.

Per la dimostrazione si fa vedere che nel caso contrario, cioè nel caso in cui il rapporto di α all'angolo giro sia dato da un numero irrazionale, il gruppo non può essere discreto; precisamente in questa ipotesi, quale che sia il numero positivo ε, esistono due semirette per il centro di rotazione che si corrispondono in una operazione del gruppo e che formano un angolo minore di ε. Per far vedere ciò, chiamiamo n il minimo intero positivo tale che sia:

$$n\alpha < 360° < (n+1)\alpha;$$

si ha che non può essere

$$(n+1)\alpha - 360° = 360° - n a$$

perché avremmo altrimenti

$$\alpha/2 = 360° - n\alpha$$

contro l'ipotesi che il rapporto tra α e 360° non sia razionale. Quindi almeno uno dei due angoli seguenti

$$360° - n\alpha \quad ; \quad (n+1)\alpha - 360°$$

è minore di $\alpha/2$; indichiamo con α_1 quell'angolo che ha questa proprietà, e avremo quindi

$$\alpha_1 < \alpha/2.$$

Si osserva ora che la rotazione dell'angolo α_1 appartiene al gruppo G, e ripetendo un numero opportuno m di volte un ragionamento analogo si giunge a dimostrare che appartiene al gruppo G la rotazione di un angolo α_m che soddisfa alla relazione

$$\alpha_m < \alpha/2^m;$$

e si può prendere l'intero m abbastanza alto perché si abbia

$$\alpha/2^m < \varepsilon$$

quale che sia il valore positivo ε fissato.

2 - Gruppi discreti di traslazioni.

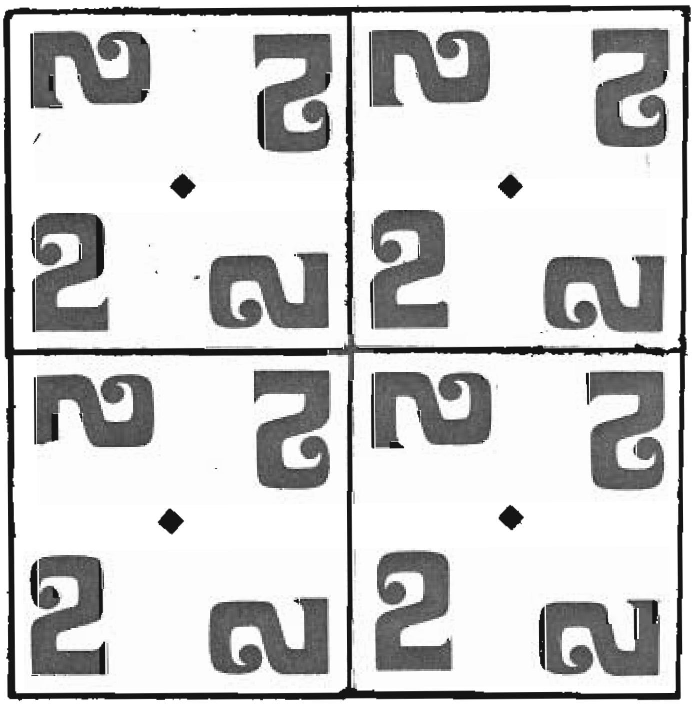
Si hanno due casi di gruppi cosiffatti: quello in cui il gruppo sia generato da una sola traslazione e quello in cui il gruppo sia generato da due traslazioni.

2 *a* - Gruppi generati da una traslazione. Tale traslazione è caratterizzata da un vettore **v** e si può assumere come dominio fondamentale D una striscia limitata da due rette parallele, trasformate l'una nell'altra dalla traslazione di vettore **v**; in fig. 11 le rette sono state assunte perpendicolari alla direzione del vettore.

2 *b* - Gruppi generati da due traslazioni. Siano **u** e **v** i due vettori che caratterizzano le due traslazioni. Si può far vedere che i due vettori **u** e **v** non possono essere paralleli tra loro; invero se così fosse si possono presentare soltanto due casi: I) il rapporto tra le loro lunghezze è un numero razionale, ed in questo caso esisterebbe un solo generatore, perché ciascuno dei due vettori sarebbe rappresentabile come multiplo di un sottomultiplo comune; II) il rapporto tra le loro lunghezze è un numero irrazionale ed in questo caso, con un ragionamento analogo a quello svolto precedentemente a proposito delle rotazioni, si può far vedere che il gruppo non sarebbe discreto; invero prefissato un numero ε positivo arbitrario si dimostra che in questo caso esiste nel gruppo una traslazione caratterizzata da un vettore di lunghezza minore di ε.

Pertanto si può assumere come dominio fondamentale D per esempio il parallelogrammo che ha come lati consecutivi i due vettori **u** e **v** che caratterizzano le due traslazioni generatrici del gruppo (fig. 12).

Fig. 16



Non esistono gruppi discreti di traslazioni aventi più di due operazioni generatrici; ciò si dimostra abbastanza facilmente basandosi sul fatto che tre vettori di un piano non possono essere linearmente indipendenti e con ragionamenti analoghi a quelli svolti sopra (casi $2a$ e $2b$).
I due gruppi discreti di traslazioni or ora considerati possono essere ampliati considerando una traslazione come prodotto di due rotazioni di 180°, così come è stato detto nel paragrafo 3 [formula (10)]; si hanno così i gruppi dei due seguenti tipi 3 e 4.

3 - Gruppi generati da due rotazioni di 180° con centri distinti.

Come abbiamo visto nel paragrafo 3 il prodotto di due rotazioni di 180° aventi i loro centri in due punti A e B dà origine ad una traslazione caratterizzata da un vettore che ha lunghezza doppia di quella del segmento A B ed ha un verso che dipende dall'ordine in cui le due rotazioni sono eseguite. Come dominio fondamentale si può assumere per esempio una mezza striscia compresa tra due rette parallele, aventi la distanza data dalla lunghezza del vettore della traslazione suddetta e che sta da una parte della retta congiungente i due centri (fig. 13).

4 - Gruppi generati da tre rotazioni di 180°.

Indichiamo con E, F, G i centri di queste tre rotazioni; si fa vedere che essi non possono essere allineati, ancora con ragionamenti analoghi a quelli sviluppati sopra (casi $2a$ e $2b$). Come dominio fondamentale si può assumere in questo caso il parallelogrammo avente un vertice per esempio in E ed avente come lati i vettori $2(F-E)$ e $2(G-E)$ (fig. 14).

6 - L'analisi dei gruppi che ammettono come operazioni generatrici tre rotazioni di angoli diversi da 180° richiede una piccola discussione, che prende le mosse da ciò che è stato detto nel paragrafo 3.
Riprendendo i simboli colà adottati, e con riferimento alla figura 5, siano M ed N i centri delle due rotazioni di angoli 2α e 2β rispettivamente. È chiaro anzitutto che i sottogruppi generati rispettivamente dalle due rotazioni

$$\rho(M, 2\alpha) \text{ e } \rho(N, 2\beta)$$

devono essere discreti; ciò porta quindi a concludere che secondo quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, gli angoli 2α e 2β debbono essere parti aliquote di 360° o anche, il che è lo stesso, che debbono esistere due numeri naturali che indicheremo con r ed s tali che si abbia

$$\alpha = 180°/r \quad ; \quad \beta = 180°/s. \tag{16}$$

Da quanto è stato detto nel paragrafo 3 si ha

$$\rho(M, 2\alpha)\ \rho(N, 2\beta) = \rho(P, \gamma)$$

con

$$\gamma = 2\alpha + 2\beta \qquad (\text{mod. } 360°).$$

Indichiamo ora con π l'angolo interno del triangolo MNP avente vertice in P; si ha quindi

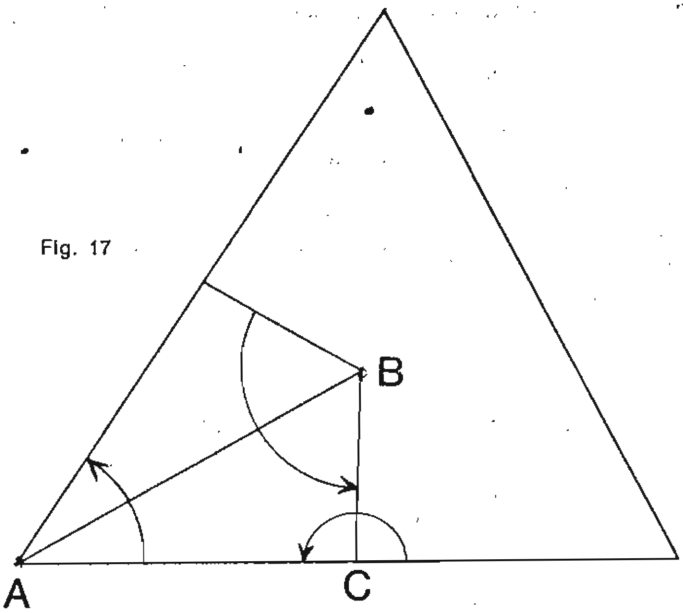


Fig. 17

$$\pi + \alpha + \beta = 180°$$

e quindi

$$2\pi + \gamma = 0 \qquad (\text{mod. } 360°).$$

Pertanto deve essere anche 2π una parte aliquota dell'angolo giro oppure, il che è lo stesso, deve esistere un intero naturale tale che sia

$$\gamma = 180°/t.$$

Per la nota relazione che vale tra angoli interni di un triangolo si deve quindi avere

$$1/r + 1/s + 1/t = 1, \tag{17}$$

con r, s, t numeri interi naturali. Una facile discussione porta a concludere che esistono tre soluzioni della (17):

$$\begin{cases} r = s = t = 3 & \text{(a)} \\ r = s = 4 \ ; \ t = 2 & \text{(b)} \\ r = 2 \ ; \ s = 3 \ ; \ t = 6. & \text{(c)} \end{cases}$$

Queste tre soluzioni danno luogo ad altrettanti gruppi discreti, ognuno dei quali a sua volta dà luogo ad una pavimentazione del piano con poligoni.

a) Il caso della soluzione (a) della (17) dà luogo ad un triangolo MNP (con riferimento alla fig. 5) che è equilatero; come dominio fondamentale si può assumere un esagono regolare di cui M sia il centro ed N e P siano due vertici consecutivi (fig. 15).

b) Il caso della soluzione (b) della (17) dà luogo ad una pavimentazione del piano con quadrati (fig. 16); questa pavimentazione è mutata in sé da rotazioni di 90° attorno ai centri dei quadrati ed attorno ai vertici, e da rotazioni di 180° attorno ai punti medi dei lati.

c) Il caso della soluzione (c) della (17) porta a pavimentare il piano con una rete di triangoli equilateri, ognuno dei quali può essere assunto come dominio fondamentale del gruppo. Tale rete è mutata in sé dalle rotazioni di 60° attorno ai vertici, dalle rotazioni di 120° attorno ai centri e dalle rotazioni di 180° attorno ai punti medi dei lati (fig. 17).

È così conclusa la discussione relativa ai gruppi discreti di isometrie piane dirette. Nella seconda parte di questo articolo analizzeremo i gruppi discreti di isometrie piane qualsivogliano, gruppi che comprendono quindi anche isometrie che cambiano il verso degli angoli.

Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi di Carlo Felice Manara, Ed. Vita e Pensiero, Milano, 1975, pp. 134, L. 2.000.

In questo breve libro un matematico non scientista si occupa del rapporto tra verità e certezza scientifica, e traccia una storia rapida ed esplicativa del pensiero scientifico fondato sul linguaggio matematico: dalle originarie definizioni della scienza al pensiero scientifico moderno, dalla nascita delle geometrie non euclidee alla più recente logica matematica, fino alla disputa tra scienze della natura e scienze dell'uomo, disputa che a noi sembra, in verità, alquanto vana. Visto in questo modo, il tema trattato dal libro, tutt'altro che scontato in generale e degno d'interesse, susciterebbe peraltro un interesse molto moderato in noi, che lo abbiamo già affrontato e abbiamo già fatto le nostre scelte. Difficilmente parleremmo del libro di Manara se esso non ponesse in discussione — sia pure indirettamente — il posto occupato dalla scienza in seno alla cultura moderna. Diremo meglio, al centro della cultura moderna, ed è questa, come è noto, l'arroganza dello scientismo, così come è noto che all'arroganza si affianca oggi l'ipocrita accusa di antiscientismo (o addirittura di congiura antiscientista) con cui lo scientista bolla chi osa resistergli; il che ricorda l'atteggiamento di Croce che, in tempi di trionfante storicismo, preoccupato per le critiche dei pochi animosi che osavano metterlo in discussione, parlava di un supposto dilagante antistoricismo.
Manara non accetta il primato dello scientismo, e la sua opposizione è buona e giusta. Poteva essere più vigorosa se il suo linguaggio non 'scientifico', non 'da addetti ai lavori', anzi, chiaramente didattico, fosse stato più pronto a liberarsi da certe scorie. In questo senso, l'autore rischia spesso di cadere in due rischi opposti. Il primo è l'abitudine al linguaggio scientista, anche se Manara sembra sempre sul punto di liberarsene. Un esempio: parlando delle classiche definizioni della scienza, afferma che esse "risalgono ad un'epoca che non aveva le preoccupazioni critiche maturate in tempi più recenti" (p. 16). Il rischio contrario, anche più grave, è quello di rimanere attaccato, per abitudine, al linguaggio dell'umanista, consapevole o inconsapevole: si pensi all'affermazione, circolante in tutto il libro, secondo cui è necessario recuperare l'umano nelle scienze, mentre dovrebbe esser chiaro a tutti, non soltanto agli scienziati, che il fine delle scienze non è tanto l'uomo quanto la verità, non tanto la causa efficiente o la causa formale o materiale quanto la causa finale. Sono invece essenziali alcune dichiarazioni, grazie alle quali il libro di Manara trova la sua giustificazione. Due noti errori, quello secondo cui la scienza 'dimostra' la metafisica, e l'altro secondo cui la scienza è il solo mezzo che libera l'uomo dal male, sono falsamente contrapposti: in realtà, il secondo discende dal primo. La novità introdotta dalla scienza rinascimentale "consiste soprattutto nell'aver dato alla osservazione dei fenomeni il carattere di misure. In questo sta buona parte della forza, ma anche della debolezza ineliminabile della nostra scienza" (pp.38-39). In questo suo smisurato amore per l'esattezza (vanificato in parte, nel nostro secolo, da Heisenberg), la scienza moderna è stata costretta ad escludere una somma immensa di realtà e di verità possibili, limitando e amputando il proprio campo di ricerca e di osservazione. Ai due eccessi denunziati da Pascal, "*exclure la raison, n'admettre que la raison*", si aggiungano due errori corrispondenti, lo scientismo ad oltranza e l'odio ad oltranza per la scienza. Si dica invece che la scienza (come la poesia) è di per sé non esauriente, perché il suo significato ultimo è fuori. Sarebbe un ottimo esercizio per lo scienziato contemporaneo meditare (come sembra suggerire Manara) sulla classificazione tradizionale delle scienze, e sulla filosofia capace di dare ad esse un senso e un fine comune che lo scientista non sempre con rammarico, ma spesso addirittura con orgoglio dichiara di non saper riconoscere.

Quirino Principe

NOTIZIARIO

*** Il n. 1 dell'anno III (1976) di *Ricerca scientifica ed educazione permanente* (Periodico edito dall'Università degli Studi di Milano) pubblica un articolo su « La dimensione umanistica della matematica: problemi della ricerca e della didattica » di Carlo Felice Manara.

*** Il n. 1-2 dell'anno XXIV (1976) di *Civiltà delle macchine* è dedicato a « scienza e neutralità » e comprende una tavola rotonda su « scienza, ideologia e società » e numerosi articoli, tra i quali ci limitiamo a segnalare qui « Anche la scienza ha conosciuto il peccato » di Carlo Felice Manara e « La matematica è neutrale? » di Lucio Lombardo Radice.

*** Il n. 6 del 1975 del *Periodico di Matematiche* (organo della MATHESIS, società italiana di scienze matematiche e fisiche), uscito alla fine del novembre 1976, presenta, tra l'altro, « Un punto di vista radicale sulla didattica della matematica » di Raffaella Franci e Laura Toti Rigatelli: riteniamo doveroso segnalare questo punto di vista ai nostri lettori anche in relazione a quanto è stato già sostenuto e segnalato in questa rubrica.

*** Il n. 10 del 1976 (ottobre) del *Notiziario della Unione Matematica Italiana* pubblica una relazione di Fedri Catelani sul terzo congresso internazionale sull'insegnamento della matematica (pp. 22-27).

*** Il n. 11 del 1976 (novembre) del *Notiziario della Unione Matematica Italiana* dà notizia dell'inizio delle attività dell'Istituto Regionale di Psicopedagogia dell'Apprendimento (IRPA) dell'Emilia-Romagna (Piazza San Martino, 1 - 40126 Bologna), di un « Seminario G. Gattegno », del Congresso del Groupement International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique (G.I.R.P.), che avrà luogo a Dubrovnik dal 10 al 17 aprile 1977 sul tema « Progrés récent en Pédagogie de la Mathématique (de la maternelle à l'université) ».